09/11/2017

Μάθημα 4ο

<u>Άσκηση</u>

Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss με μερική οδήγηση. Στη συνέχεια να γίνει η LU παραγοντοποίηση του $A' = PA$, να βρεθεί ο αντίστροφος του A' με LU παραγοντοποίηση και από αυτόν να βρεθεί ο A^{-1}.

<u>Λύση</u>

$$\begin{array}{c|ccc|ccc} 1/3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & \underline{3} & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad i = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{c|ccc|ccc} 1/2 & & 1/3 & 2/3 & 1 & 0 & -1/3 \\ & & \underline{2/3} & 1/3 & 0 & 1 & -2/3 \\ & & & \underline{1/2} & 1 & -1/2 & 0 \end{array} \qquad i = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(A^{-1}\right)^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Άρα:</u> $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$A' = PA = LU$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$A'X = I \Rightarrow L\underbrace{UX}_{Y} = I \iff \begin{cases} LY = I \\ UX = Y \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$Y^T = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(προς τα εμπρός αντικαταστάσεις)

$$\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & 1 \end{array}$$

$$X^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left((A')^{-1}\right)^T = A'^{-1} = X^T$$

P: μεταθετικός
Άρα $P^{-1} = P^T$

$$A' = PA \Leftrightarrow A'^{-1} = (PA)^{-1} = A^{-1}P^{-1} = A^{-1}P^T$$

$$\Leftrightarrow A^{-1} = A'^{-1} \cdot P$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

> Για τη λύση του συστήματος $Ax = b$, λόγω σφαλμάτων στρογγύλευσης, λύνεται ένα διαταραγμένο σύστημα $A^* x^* = b^*$, όπου $A^* = A + \delta A$, $b^* = b + \delta b$, $x^* = x + \delta x$.
Θεωρούμε για κάποια φυσική νόρμα ότι:
$\|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\| < 1$. (*)

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b \Leftrightarrow$$
$$Ax + \delta A \cdot x + (A + \delta A)\delta x = b + \delta b \Leftrightarrow$$
$$(A + \delta A)\delta x = -\delta A \cdot x + \delta b \Leftrightarrow$$
$$(I + A^{-1}\delta A)\delta x = A^{-1}(-\delta A x + \delta b) \Leftrightarrow$$
$$\delta x = (I + A^{-1}\delta A)^{-1} A^{-1}(-\delta A x + \delta b)$$
$$\|\delta x\| \leq \|(I + A^{-1}\delta A)^{-1}\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot (\|\delta A\| \cdot \|x\| + \|\delta b\|)$$
$$\leq \frac{1}{1 - \|A^{-1}\delta A\|} \|A^{-1}\| (\|\delta A\| \cdot \|x\| + \|\delta b\|)$$
$\Rightarrow$

(*) $\|A^{-1}\delta A\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\| < 1$
Από το θεώρημα του Neumann έχουμε ότι ο $I + A^{-1}\delta A$ είναι αντιστρέψιμος.

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\|\cdot\|\delta A\|}\left(\|\delta A\| + \frac{\|\delta b\|}{\|x\|}\right) \overset{(*)}{\leq}$$

$$\leq \frac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\|\cdot\|\delta A\|}\cdot\left(\|\delta A\| + \|A\|\,\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\right)$$

$$= \frac{\|A^{-1}\|\cdot\|A\|}{1-\|A^{-1}\|\cdot\|A\|\,\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}\cdot\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\right) =$$

$$= \frac{K(A)}{1-K(A)\,\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\right)$$

(*) Ισχύει: $Ax=b \Rightarrow \|b\| \leq \|A\|\cdot\|x\| \Leftrightarrow \|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|}$

Παραγοντοποίηση Cholesky

Ορισμός: Ένας πίνακας $A\in\mathbb{C}^{n,n}$ είναι ερμιτιανός και θετικά ορισμένος αν:
$A^H = A$ και $(x, Ax) > 0 \quad \forall x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}$

$(x, Ax) = (A^H x, x)$

απόδ.
$(x, Ax) = x^H A x = (A^H x)^H\cdot x = (A^H x, x)$

$\big((x, Ax) = (Ax, x) > 0 \big)$

Ορισμός: Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος αν:

$$A^T = A \quad \text{και} \quad (x, Ax) = (Ax, x) > 0$$
$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

Θεώρημα: Αν $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ερμιτιανός και θετικά ορισμένος τότε ο $(n-1)\times(n-1)$ πίνακας που προκύπτει αν διαγράψουμε την i-γραμμή και στήλη, θα είναι ερμιτιανός και θετικά ορισμένος.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & a_{ii} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \longrightarrow A' = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{bmatrix}$$

Απόδειξη.

Θεωρώ το διάνυσμα $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_2 \end{pmatrix} \leftarrow \text{i-στοιχείο}$$

$$0 < (x, Ax) = x^H A x = \left(x_1^H \; 0 \; x_2^H \right) \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & a_{ii} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \left(x_1^H \; 0 \; x_2^H \right) \begin{bmatrix} A_{11}x + A_{13}x_2 \\ A_{21}x + A_{23}x_2 \\ A_{31}x + A_{33}x_2 \end{bmatrix} =$$

$$= x_1^H A_{11} x_1 + x_1^H A_{13} x_2 + x_2^H A_{31} x_1 + x_2^H A_{33} x_2 =$$

$$= (x_1^H \; x_2^H) \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{= w} =$$

$$= w^H A' w \qquad \forall w \in \mathbb{C}^{n-1} / \{0\}$$
$$= (w, A'w)$$

<u>Πόρισμα</u>

Αν $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ είναι ερμιτιανός και θετικά ορισμένος τότε ο πίνακας που προκύπτει αν διαγράψω οποιεσδήποτε γραμμές και τις αντίστοιχες στήλες θα είναι ερμιτιανός και θετικά ορισμένος (Θ.Ο.)

<u>Πόρισμα</u>

Τα διαγώνια στοιχεία ενός ερμιτιανού και Θ.Ο. πίνακα είναι θετικά

$$0 < (x, ax) = \bar{x} a x = a|x|^2 \iff a > 0$$

<u>Θεώρημα Cholesky:</u>

Αν $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι συμμετρικός και Θ.Ο., τότε υπάρχει μοναδικός κάτω τριγωνικός πίνακας $L \in \mathbb{R}^n$ με $l_{ii} > 0$, $i = 1(1)n$, τέτοιος ώστε
$A = LL^T$

Για $n = 1$: $A = a > 0$, $a = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = L \cdot L^T$
ισχύει.

Θεωρώ ότι η πρόταση ισχύει για κάθε πίνακα $(n-1)\times(n-1)$ (συμμετρικό και Θ.Ο.)
Θα αποδείξω για $n\times n$ πίνακες συμμετρικούς (συμμετρικούς και Θ.Ο.).

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $A = \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & y^T \\ \hline y & \tilde{A} \end{array}\right] =$

$$\overset{!}{=} \left[\begin{array}{c|c} l_{11} & 0 \\ \hline z & \tilde{L} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} l_{11} & z^T \\ \hline 0 & \tilde{L}^T \end{array}\right]$$

$$l_{11}^2 = a_{11} \iff l_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$l_{11}\cdot z = y \iff z = y/l_{11}$$

$$l_{11} z^T = y^T \iff z = y/l_{11}$$

z: πίνακας με rank=1

εσωτ γινόμενο = αριθμός

$$zz^T + \tilde{L}\cdot\tilde{L}^T = \tilde{A} \iff \tilde{L}\tilde{L}^T = \tilde{A} - zz^T$$

Αρκεί να αποδείξω ότι $\tilde{A} - zz^T$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος.

Θεωρώ $x \in \mathbb{R}^{n-1}\setminus\{0\}$ και $w \in \mathbb{R}^n = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a_{11}} y^T x \\ x \end{pmatrix}$

$$\underset{\text{επειδή } A \text{ Θ.Ο.}}{0 <} (w, Aw) = \left[-\frac{1}{a_{11}} y^T x \mid x \right] \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & y^T \\ y & \tilde{A} \end{array}\right] \begin{bmatrix} -\frac{1}{a_{11}} y^T x \\ x \end{bmatrix}$$

$$= (x, (\tilde{A} - zz^T)x)$$

Άρα $\tilde{A} - zz^T$ συμ. και Θ.Ο.